FORUM

# À PROPOS DES BOUCLES DE RÉTROACTION ET DE LA STABILITÉ DES SYSTÈMES

CLAUDE LOBRY

***La modélisation et la simulation numérique sont des outils intégrateurs indispensables à la compréhension de l'environnement planétaire et à la prévision de son évolution. Mais la complexité des modèles mis en œuvre, et la difficulté d'en quantifier, même partiellement, les incertitudes font de l'interprétation de leurs résultats une source permanente de controverses scientifiques. Le degré de "technicité" des modèles physiques et chimiques de l'environnement permet-il encore une approche scientifique des problèmes, dans une perspective nécessairement pluridisciplinaire ? Les concepts mis en jeu et leur formulation permettent-ils une lecture scientifique des idées par les autres communautés ? Le caractère pluridisciplinaire de ce débat ne fait qu'en souligner toute l'importance.***



L'étude de l'environnement conduit à considérer des systèmes comportant des interactions multiples. L'exemple bien connu des problèmes soulevés par les gaz à effet de serre met en jeu des interactions entre l'océan et l'atmosphère, entre des systèmes vivants et la physico-chimie de l'atmosphère, etc. L'augmentation de la température peut conduire, dans certaines conditions, à une augmentation de la nébulosité qui, en retour, entraînera une diminution de l'ensoleillement, donc une tendance au refroidissement... Ainsi on trouve chez Duplessy et Morel[1] : « Ces processus peuvent s'organiser en chaîne formant une boucle fermée, dite boucle de rétroaction, dont le résultat final est d'agir sur la cause même de la perturbation qui sollicite le système, pour s'y opposer ou au contraire l'amplifier. Dans le premier cas, on a affaire à une boucle de rétroaction négative (stabilisante) et dans le second cas une boucle de rétroaction positive (déstabilisante) ». Ou encore chez Le Treut et Kandel[2] : « Il s'agit alors d'une rétroaction négative, potentiellement très importante, comme l'ont montré en 1987 E. Roekner et ses collaborateurs à Hambourg. Mais pour les nuages hauts, une augmentation du contenu en eau ou en glace provoque une compétition entre une augmentation de l'effet de serre et une diminution du rayonnement solaire transmis vers le bas, qui peut au contraire donner lieu à une rétroaction positive ».

L'objet de cette courte note est de montrer que les expressions soulignées en gras n'ont pas de contenu scientifique réel. Soit on donne un sens précis à "rétroaction positive", et alors il est faux qu'une telle rétroaction soit stabilisante, soit on reste vague et alors une "rétroaction positive" peut être aussi bien stabilisante que déstabilisante. Pour éviter tout malentendu je tiens à dire que c'est la problématique environnementale qui m'a fait choisir ces deux citations. Je n'ai rien contre ces deux auteurs, d'autant moins que j'apprécie beaucoup leurs textes de vulgarisation, les seuls qui me soient accessibles, étant moi même spécialiste de théorie ses systèmes dynamiques appliquée à l'automatique. Je pourrais choisir d'autres exemples issus de disciplines différentes[3] et, pour avoir tenté l'expérience sur plusieurs collègues, y compris mathématiciens, je peux témoigner que la croyance :

**Rétroaction négative = Stabilité**

est largement répandue. Les seuls qui ne se laissent pas prendre sont les automaticiens, et pour cause, puisque ces questions sont abordés dans les cours élémentaires d'automatique. C'est donc à une tentative de vulgarisation de quelques notions d'automatique que vais me livrer.

## SUR LE FONCTIONNEMENT DE LA CHASSE D'EAU

La figure 1 représente le schéma d'un dispositif de rétroaction bien connu : celui qui gouverne le remplissage d'un réservoir (de chasse d'eau, ou encore une cuve de carburateur). Comme l'indique la figure, plus le pointeau est haut, moins l'arrivée d'eau est forte et inversement. Pour rendre la discussion plus éclairante pour la suite j'ai supposé que le réservoir présentait une fuite dont le débit est très inférieur à celui de l'arrivée d'eau maximale. Il ne fait pas de doute que le niveau de l'eau va se stabiliser à une hauteur $h$ pour laquelle le débit d'arrivée compensera exactement celui de la fuite. En effet : Si, à la suite d'une perturbation, le niveau monte au dessus de $h$ le mécanisme fait que le débit

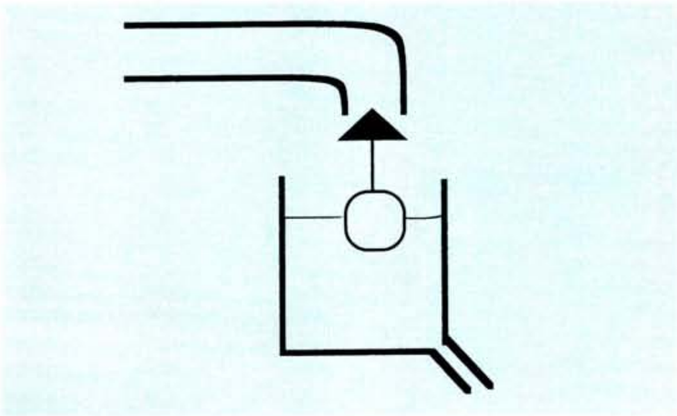

Figure 1 – **Dispositif gouvernant le remplissage d'un réservoir.**

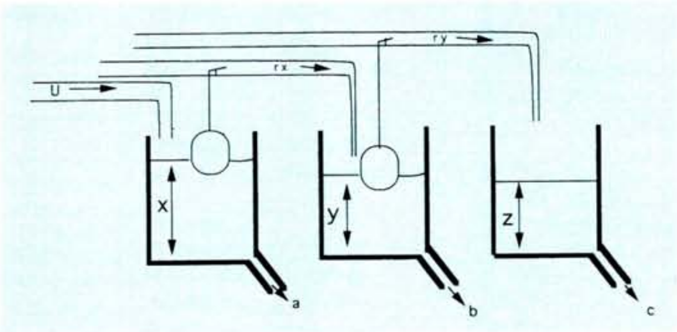


Figure 2 – **Chaîne de trois réservoirs.**

**Claude Lobry** : *Observatoire Océanologique, Écologie du plancton marin, B.P. 28, 06230 Villefranche-sur-Mer.*

d'arrivée est *diminué* et donc le niveau va baisser ; inversement le débit augmentera si le niveau baisse. « La cause de l'augmentation du niveau de l'eau (le débit d'arrivée) est diminuée quand le niveau est trop haut, il y a une *rétroaction négative* ». Et le processus est effectivement stabilisé, comme nous le savons tous !

## SUR LE FONCTIONNEMENT D'UNE CHAÎNE DE RÉSERVOIRS

La figure 2 représente une chaîne de trois réservoirs, le débit d'alimentation des deux derniers étant contrôlé par la hauteur dans le réservoir précédent, de telle façon que plus le niveau est haut dans le réservoir précédent plus le débit est élevé.

Notons x, y et z les niveaux dans chacun des trois réservoirs, a, b, c les débits de sortie respectifs de chaque réservoir, U le débit de remplissage du premier et enfin r x et r y les débits de remplissage des deux derniers. Toutes les constantes sont strictement positives. Pour simplifier j'ai supposé les débits de sortie constants (indépendants de la hauteur dans le réservoir) ce qui n'est pas très physique. On pourra supposer, soit que les variations de hauteur sont négligeables, soit qu'un dispositif adéquat maintient ce débit constant. La "cause" agissant sur le système, l'"entrée" dans la terminologie de l'automatique, est le débit U.

- Si U est plus grand que a le niveau x monte, inversement il descend.
- Si r x est plus grand que b le niveau y monte, inversement il descend.
- Si r y est plus grand que d le niveau z monte, inversement il descend.

Donc si U est plus grand que a le niveau x monte et finit par dépasser b/r ce qui a pour effet de faire monter y qui finit par dépasser c/r ce qui a pour effet de faire monter le niveau z et inversement si U est plus

1. **Duplessy J.-C. et Morel P. (1990).** *Gros temps sur la planète,* **Odile Jacob, p. 143.**

2. **Le Treut H. et Kandel R. (1992).** *Que nous apprennent les modèles du climat ?,* *La Recherche,* **n° 243 .**

3. **Sans me livrer à une étude bibliographique je peux citer :**
**– Un article : L. Stone and R.S.J. Weisburd (1992).** *Positive Feedback in Aquatic Ecosystems,* **Tree Vol. 7, n° 8 , p. 263-267.**
**– Un chapitre d'un livre : J. Aracil,** *Introduction à la Dynamique des Systèmes,* **Presses Universitaires de Lyon, Chapitre II**
**– Un livre entier : D. De Angelis, W. Post et C. Travis (1986).** *Positive Feedback in Natural Systems,* **Biomathematics, Vol. 15, Springer Verlag.**

petit que a. Supposons que nous voulions maintenir z au niveau 1. Nous allons établir une rétroaction *négative* de la forme :

$$U = a - k(z-1) \qquad k > 0$$

Comme cela si le niveau z est trop élevé nous agissons sur la cause de manière à faire diminuer z et inversement. « La cause de l'augmentation du niveau de l'eau dans le troisième réservoir (le débit d'arrivée dans le premier réservoir) est diminuée quand le niveau z est trop haut, il y a une *rétroaction négative* ». C'est, mot pour mot, l'argumentation que nous avons employée dans le cas du pointeau et, pourtant, il se trouve que ce dispositif ne fonctionne absolument pas !

Pour s'en convaincre il suffit de faire un modèle mathématique de ce dispositif. Les variations instantanées de hauteur dans les réservoirs, soient les dérivées x', y' et z' sont données par la différence entre les débits d'entrée et les débits de sortie :

$$x' = U - a$$
$$y' = r x - b$$
$$z' = r y - c$$

Le système bouclé par la rétroaction envisagée est donc :

$$x' = a - k(z-1) - a = -k(z-1)$$
$$y' = r x - b$$
$$z' = r y - c$$

On trouve sur la figure 3 trois simulations pour k = 1, r = 0.1 et a = b = c = 0.1 correspondant à trois conditions initiales différentes, des variations de z au cours du temps. On voit que le système est complètement instable ! Comment expliquer qu'une argumentation qui avait bien marché avec un réservoir, et qui semblait encore très convaincante, soit prise en défaut ici avec trois réservoirs. Le point clé se trouve dans le verbe ci-dessous en italique :

« Donc si U est plus grand que a le niveau x monte et *finit* par dépasser b/r... » et qui ne figurait pas dans la première argumentation.

Entre le moment où l'ordre est donné d'augmenter U et celui où cet ordre a un effet sur la variation du niveau dans le troisième cuve il s'écoule un délai. Pendant ce temps il se pourrait que le niveau z ait augmenté et même dépassé 1. L'ordre serait donc mauvais. On conçoit qu'ici s'arrêtent les possibilités d'une discussion littéraire, non formalisée. Seules les mathématiques permettent d'y voir clair et nous allons voir qu'aucune rétroaction, positive ou négative du type précédent n'est susceptible de stabiliser le système.

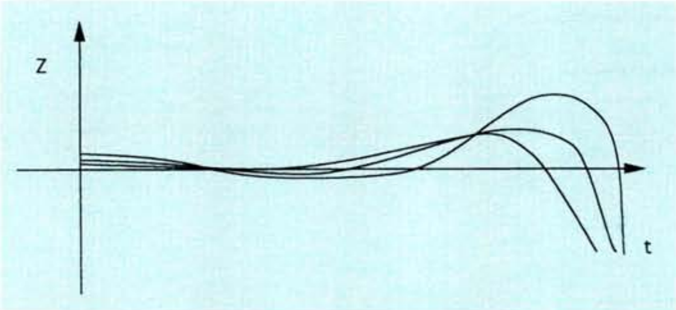


Figure 3 – **Simulations correspondant à trois conditions initiales différentes z = niveau t = temps.**

## THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA CHAÎNE DE TROIS RÉSERVOIRS

Nous avons affaire à un système différentiel linéaire

$$x' = -k(z-1)$$
$$y' = r x - b$$
$$z' = r y - c$$

qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k \\ r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$$

Il possède un unique état d'équilibre, pour lequel les dérivées sont nulles. Il est donc obtenu en résolvant le système :

$$0 = -k(z-1)$$
$$0 = r x - b$$
$$0 = r y - c$$

ce qui donne, $x = b/r$, $y = c/r$ et $z = 1$. Enfin un *théorème classique*, enseigné dans les DEUG science et structure de la matière des universités françaises (DEUG A), nous dit que cet équilibre est stable, si et seulement si, les trois *valeurs propres* de la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -k \\ r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \end{bmatrix}$$

ont leurs *parties réelles* strictement négatives. Il se trouve que pour cette matrice les valeurs propres sont données par l'équation :

$$\lambda^3 = -k r^2$$

ce sont donc les racines cubiques de -1 multipliées par un certain coefficient (la racine cubique positive de $k r^2$, et il se trouve que deux de ces racines ont leur partie réelle strictement positive.

Ce théorème nous enseigne donc que, quels que soient a, b, c et r, quelle que soit l'amplitude k de la rétroaction envisagée, *il est impossible de stabiliser* le niveau dans le troisième réservoir par une rétroaction de z, qu'elle soit positive ou négative ! On conviendra que ce résultat qui repose sur la position dans le plan complexe des racines cubiques de l'unité échappe à une description dans la langue naturelle. Il fait comprendre aussi que la stabilité, qui est une affaire de nombres complexes, ne peut pas se réduire à une question de signe, puisque ces derniers n'ont pas de signe.

## DEUX MOTS D'HISTOIRE ET DE THÉORIE

Le régulateur de Watt *(cf. figure 4)*, est un des premiers dispositifs de régulation basé sur une rétroaction. Il remplissait convenablement ses fonctions à la fin du XVIIIe et au début du XIXe siècle. Vers le milieu du XIXe siècle, avec l'évolution des techniques, il se mit à ne plus fonctionner. Indépendamment, J.C. Maxwell (1868) et Vischnégradsky (1876) firent une analyse mathématique du dispositif[4]. Le même théorème que celui invoqué plus haut leur permit de déterminer quels étaient les paramètres à respecter pour obtenir une bonne régulation. Les mathématiques allaient devenir un des outils de base de l'automatique qui continue de nos jours à en faire un usage important.

L'automatique a mis en évidence les notions fondamentales d'entrée *(input)*, de sortie *(output)* et la notion essentielle de *variable d'état*, notions à partir desquelles se construisent celles de *contrôlabilité* (ou *commandabilité* suivant les auteurs), d'*observabilité*, d'*identifiabilité*. On le voit, la notion de *rétroaction* n'est pas la première dans la théorie, même si historiquement elle a été une des premières à émerger.

La différence essentielle entre le réservoir simple et la cascade de trois réservoirs ou le régulateur de Watt tient à ce que dans le premier cas il y a une seule variable d'état alors que dans les deux autres il y en a trois. Les variables d'état, ce sont les variables minimales nécessaires pour spécifier l'état présent du système et qui seront suffisantes dans les cas déterministes pour prédire le futur. Pour les trois réservoirs il est assez clair qu'il faut connaître la hauteur dans chacun. Pour le régulateur de Watt il s'agit de stabiliser la vitesse de rotation de la machine ; la connaissance de la vitesse de rotation du support des boules, de l'angle fait par les boules avec ce dernier, mais aussi la vitesse angulaire sont nécessaires (car les boules sont soumises aux lois de la mécaniques, donc à une équation différentielle du second ordre, faisant intervenir la vitesse). Dans le cas d'une seule variable d'état, la matrice régissant la stabilité du système est une matrice 1 x 1, son unique valeur propre est la matrice elle-même et son signe est positif si la rétroaction est positive, négatif sinon. C'est le seul cas où le concept de signe d'une rétroaction est pertinent. Autrement dit, la rétroaction négative est effectivement stabilisante lorsque la chaîne entre la cause et l'effet est réduite à un maillon[5].

Dès la dimension deux les valeurs propres de la matrice du système bouclé ne peuvent plus être toutes simultanément négatives, sauf si la rétroaction fait intervenir *toutes* les variables d'état. Si ces dernières sont mesurées il n'y a pas de problème. Sinon il faudra s'assurer que le système est observable et procéder à une reconstruction de l'état. Il arrive aussi que l'état soit de "dimension infinie" lorsque le système est à paramètres distribués[6]. C'est le cas si par exemple on s'intéresse à la régulation de la température dans un milieu non homogène ou à la diffusion passive de plancton dans l'océan.

La théorie qui explique le fonctionnement des régulateurs à boules est bien plus intéressante que ma petite "théorie" des chasses d'eau emboîtées. J'aurais pu l'exposer ici . Si j'ai préféré illustrer mon propos par une question de réservoirs qui fuient, c'est pour deux raisons.

■ La première est que, même si elles restent accessibles à un bon étudiant de seconde année de DEUG sciences et structure de la matière, les équations plus compliquées de la théorie du régulateur de Watt auraient détourné l'attention du point essentiel : la dimension de l'espace d'état. En particulier on aurait pu croire que la non linéarité des équations était en cause.

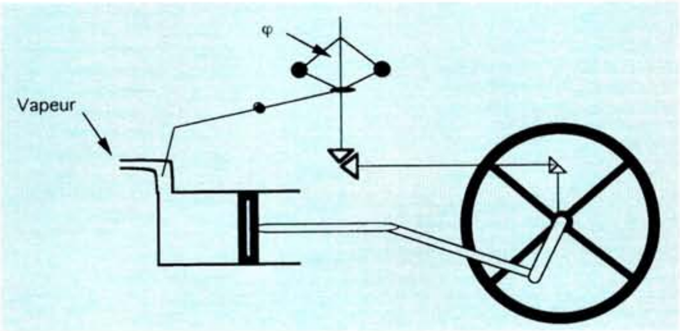


Figure 4 – **Régulateur de Watt.**

**4. Pontriaguine L. S. (1969).** *Équations différentielles ordinaires,* **Éd. MIR, le chapitre 27 de ce livre est consacré au régulateur de Watt. On y trouvera les éléments d'histoire évoqués ainsi qu'une théorie mathématique.**

**5. D'autres cas existent, où une rétroaction négative est stabilisante. Par exemple, sous certaines hypothèses, lorsque les variations imposées à la cause sont très lentes. Une discussion sérieuse nécessite des développements de théorie des systèmes qui sortent du cadre de cet article.**

**6. Lions J.-L. (1990).** *El planeta tierra, el papel de las matematicas y de los super ordenadores,* **Instituto de Espana 1990. Ce livre est un "état de l'art" sur la modélisation des systèmes à paramètres distribués écrit pour des non spécialistes.**

■ La seconde raison est que les biologistes et écologues qui sont entraînés à faire des bilans ( de matière, d'énergie... ) seront peut-être plus sensibles à des problèmes de "baignoires avec fuites" qu'à des questions de mécanique rationnelle qui peuvent leur paraître appartenir à un autre domaine de la science. Il n'est d'ailleurs pas difficile d'imaginer une dynamique de population pour laquelle le phénomène de déstabilisation ci-dessus pourrait se produire.

## CONCLUSION

Toutes ces notions, issues de la théorie des systèmes, sont nécessaires pour aborder la modélisation de systèmes naturels complexes. Cela était fort bien rappelé par Pavé et Barbault[7]. J'insiste avec vigueur ici pour qu'elles soient impérativement accompagnées de leur formalisation mathématique, sous peine de n'être que des métaphores plus dangereuses qu'utiles. J'insiste d'autant plus que l'opinion que les mathématiques ne sont d'aucune utilité dans les sciences de la vie est assez répandue. Le texte suivant de C. Allègre[8] me semble assez représentatif de l'idée que beaucoup se font de l'utilité des mathématiques dans les sciences de la nature. « Les tendances à une mathématisation outrancière (tendances qui, heureusement, s'estompent) éloignaient des sciences naturelles les jeunes chercheurs sortis des grandes écoles. Le retournement actuel est net : les mathématiques fournissent des outils mais ne sont pas les structures de pensée fondamentale : en biologie, en recherche pharmaceutique, en informatique, ce sont les éléments de combinatoire et la logique, plus que les synthèse bourbachiques qui ont aidé le développement de ces sciences. »



Je peux suivre volontiers C. Allègre dans sa critique, d'autant mieux que j'ai été amené à critiquer moi aussi, certains aspects du fonctionnement de la communauté mathématique en France[9]. Mais il se trompe gravement sur ce que sont les mathématiques utiles. Peut-être quelques éléments de combinatoire et de logique suffisent-ils aux besoins actuels du biochimiste ou du biologiste moléculaire, mais la connaissance des mécanismes du monde vivant ne peut pas se réduire à l'identification de molécules. Ceux qui voudront comprendre les mécanismes et la dynamique des processus auront aussi besoin, pour structurer leur pensée, d'algèbre linéaire, de calcul différentiel, d'équations différentielles et bien d'autres choses... Les mathématiques ne sauraient être réduites aux grandes synthèses abstraites et à la combinatoire et nul ne peut prétendre savoir, aujourd'hui, quelles seront les mathématiques utiles demain !

Pour finir le message que je tente de faire passer est donc le suivant : dès qu'une chaîne de causes et d'effets a plus de deux maillons l'intuition est totalement insuffisante pour maîtriser les effets d'une rétroaction et plus généralement d'une interaction. Seule une modélisation sérieuse du phénomène, suivie d'une analyse mathématique, pouvant nécessiter des techniques sophistiquées, peut éventuellement permettre de prévoir le résultat.

Il n'est pas question de demander au géophysicien, au chimiste de l'atmosphère, au spécialiste du plancton et plus généralement à tous les scientifiques qui s'occupent de l'environnement de devenir de fins spécialistes du calcul des valeurs propres d'une matrice et de la théorie des systèmes dynamiques ! Mais des jeunes existent, qui ont une formation en mathématiques ou en automatique. Il devient urgent d'en embaucher quelques uns dans des lieux où il n'est pas traditionnel de faire appel à leurs services ! ■

7. **Pavé A. et Barbault R. (1992). Ecosystèmes et environnement ,** *Lettre de l'environnement n° 7* . **On retrouvera également ce point de vue dans Jollivet M. et Pavé A. (1992).** *Natures , Sciences, Sociétés,* **Vol. 1, n° 1 .**

8. **Allegre C. (1991). Point de vue,** *Pour la Science* **n° 162.**

9. **Il y a un demi-siècle, un groupe de mathématiciens Français s'est donné le nom collectif de Bourbaki. Il a été à l'origine d'une école de pensée, dite "école formaliste", qui a joué un rôle considérable dans le développement des mathématiques en France et à l'étranger. Inévitablement, le succès de cette école a engendré quelques excès, comme ce qu'il est convenu d'appeler les "mathématiques modernes". Il ne faudrait pas que la réaction, justifiée, contre ces excès entraîne le rejet de la "méthode formaliste" qui est un des acquis essentiels des mathématiques de ce siècle. J'ai été amené à polémiquer dans un petit livre (***Et pourtant... Ils ne remplissent pas N,* **Aleas Éditeur, 15 quai Lassagne, Lyon) sur le thème du formalisme en mathématiques.**