Natures Sciences Sociétés 18, 277–286 (2010)

DOI: 10.1051/nss/2010035

Disponible en ligne sur :
www.nss-journal.org

Natures
Sciences
Sociétés

Dossier Adaptation aux changements climatiques*

Une approche viabiliste du couplage des systèmes climatique et économique

Jean-Pierre Aubin

Mathématicien, LASTRE (Laboratoire d'applications des systèmes tychastiques régulés), 14 rue Domat, 75005 Paris, France

Mots-clés :
viabilité ;
inertie ;
contrôle ;
couplage ;
systèmes

Résumé – Cet article présente, dans le cadre du couplage des systèmes climatique et économique, les concepts fournis par la théorie (mathématique) de la viabilité, parmi lesquels les notions d'évolutions « persistantes » dans un environnement – qui maximisent la fonction de temps de sortie de cet environnement, ainsi que les évolutions ponctuées qu'elles engendrent lorsque les régulons sont constants – et les notions d'évolutions « lourdes », satisfaisant le principe d'inertie : maintenir les régulons constants jusqu'à ce que la viabilité soit en jeu et, ensuite, les laisser évoluer avec la vitesse minimum. Ainsi, dans le cas des systèmes climatique et économique, les théorèmes de viabilité fournissent l'ensemble des états initiaux à partir desquels le niveau des émissions de gaz à effet de serre est inférieur à un seuil donné et le changement économique, également inférieur à un seuil d'inertie.

Keywords:
viability;
inertia;
control;
coupling;
systems

Abstract – A viability approach to the coupling of climate and economic systems. Within the framework of coupled climate and economic systems our paper presents concepts provided by the (mathematical) "viability theory". These include both the notion of "persistent evolutions" in a given environment, which maximize the exit time function of this environment as well as the evolutions obtained when their regulons are kept constant, and the notion of "heavy evolutions", satisfying the inertia principle which dictates that regulons remain constant until their viability is at stake and then evolve with minimum velocity. Thus, in the case of coupled climate and economic systems, viability theorems provide all initial states at which emission levels of greenhouse gases are below a given threshold and for which economic changes are also below a given level of inertia.

Motivations

Couplage entre systèmes climatique et économique

Un des nombreux problèmes que se posent les environnementalistes est de maintenir à chaque instant la concentration de gaz à effet de serre au-dessous d'un certain seuil[1]. C'est un exemple de « contrainte de viabilité ». Une évolution (associant à chaque instant la concentration de gaz à effet de serre) respectant cette contrainte de viabilité tout au long du temps est appelée « évolution viable ». La difficulté tient à la confrontation de deux systèmes : le système climatique et le système économique.

Le système climatique régit l'évolution de la concentration des gaz à effet de serre en fonction des émissions de polluants. Les variables que l'on peut isoler étant au moins munies d'unités de mesure, ce système est susceptible de formalisation mathématique, au moins de celle motivée par la physique, conduisant notamment à la résolution d'équations aux dérivées partielles. Ces équations dépendent de multiples paramètres, dont ceux dus à l'activité humaine, et notamment à son activité économique : voir, par exemple, Jancovici (2002), Le Treut et Jancovici (2001), Guesnerie et Tulkens (2008).

Le système économique régit l'émission des gaz à effet de serre en fonction du niveau de l'activité industrielle. Trois aspects au moins le distinguent du système climatique : les variables macroéconomiques ne sont pas munies d'unités de mesure aussi convaincantes que les variables physiques ; par ailleurs, son échelle de temps est bien plus courte, et elle se rétrécit, contrairement au temps long de la géologie et moins long de la climatologie. Une « échelle de temps » de l'évolution d'une variable

Auteur correspondant : aubin.jp@gmail.com

* Cf. dans ce numéro, la présentation par la Rédaction du dossier « Adaptation aux changements climatiques ».

[1] Ce travail a été effectué avec le support financier de l'Agence nationale de la recherche (ANR), dans le cadre du programme Agriculture et développement durable, projet ANR-05-PADD-007-002, DEDUCTION. Je remercie les chercheurs du LASTRE pour leurs contributions implicites.

peut être mesurée, par exemple, par son « inertie », définie ici comme la plus grande de ses vitesses au cours de son évolution.

Bien plus grave, à mes yeux, on suppose l'existence d'un seul ou d'un tout petit nombre d'acteurs/décideurs agissant sur les variables qui interviennent dans le couplage du système économique et du système climatique, alors qu'en réalité une cohorte d'acteurs interviennent à hue et à dia. Ils sont loin d'être identifiables à un acteur individuel rationnel, poursuivant un objectif de façon optimale selon un critère bien déterminé, prévoyant le futur et agissant, seul, sur le système. Au contraire, il me semble que ce « pilote agrégé » est « myope, conservateur et explorateur, paresseux et opportuniste » Aubin (2010), doté de la *métis* grecque, cette sorte d'intuition opportuniste et rusée. De modèles mathématiques, les traductions mathématiques de ce type de comportement deviennent alors des « métaphores mathématiques ». Puisque le nombre de variables (souvent dépourvues d'unités et, dès lors, ne pouvant être véritablement mesurées) dépasse les capacités de calcul, il faut se résigner à abandonner tout espoir quantitatif et se contenter de résultats qualitatifs que peut apporter une analyse mathématique des formalisations des phénomènes observés. Ce point de vue a été pris en compte dans de nombreux travaux parmi lesquels Aubin, Chen et Durand (à paraître), Aubin et Saint-Pierre (2005b et 2007), Barbault et Weber (2010), Cury *et al.* (2005), Griffon (1996 et 2003), Griffon et Griffon (2010), Le Fur *et al.* (1999), etc. Heureusement, les mathématiques sont aussi capables de s'acquitter de cette tâche et ne se réduisent pas à un simple « quantitativisme » (Aubin, 2010). Comme le disait Jacques-Louis Lions, les mathématiques sont « quantiques » et se présentent en blocs incompressibles. En ce qui concerne les sciences du vivant, en sus des quantas vraiment mathématiques, qui ne peuvent être utilisés que de façon métaphorique, les quantas quantitatifs ou numériques ne peuvent relever, à mon sens, que d'illustrations, puisque le nombre de variables de ces systèmes est immense et que les lois qui les lient entre elles ne sont pas connues de façon à être explicitées pour se prêter au calcul. C'est pervertir une approche scientifique que de la réduire à des mesures par des nombres, à la *pantometria* de Weigel (1625-1699).

Les relations entre ces deux systèmes seront décrites ici par des équations différentielles qui dépendent d'une variable de régulation, appelée « régulon ». Dans l'exemple étudié dans cet article, le régulon est le niveau de l'activité industrielle.

Le coût pour réduire la pollution est une fonction du changement du niveau de l'activité économique. On peut imaginer toute une série de telles fonctions reflétant les opinions de tel ou tel modélisateur, mais le raisonnement ne tient pas compte de ce choix, sur lequel nous ne prenons pas partie. Pour fixer les idées, je choisis l'inertie de l'activité économique comme indicateur.

Se plaçant à l'instant présent, connaissant la concentration de gaz à effet de serre, le taux de pollution à court terme et le niveau de l'activité économique, on se pose la question de pouvoir évaluer maintenant quelle sera l'inertie de l'activité économique dans l'avenir pour maintenir la concentration de gaz à effet de serre au-dessous d'un seuil fixé. Puis il faut minimiser cette inertie, pour se placer dans le meilleur du pire des cas. La fonction qui répond à cette question en associant à toute concentration de gaz à effet de serre, à tout taux de pollution et à tout niveau d'activité industrielle la plus petite inertie nécessaire au respect des contraintes de viabilité est appelée « fonction d'inertie ».

Le premier objectif est de calculer cette fonction d'inertie. La théorie de la viabilité y pourvoit, sans faire aucune hypothèse de linéarité ni sur la dynamique ni sur les contraintes, mathématiquement, théoriquement, algorithmiquement et, pour de petites dimensions, numériquement. Les algorithmes de viabilité sont gourmands en mémoire d'ordinateur et victimes de la malédiction de la dimensionnalité (*dimensionality curse*). Les solutions à ce problème relèvent de techniques numériques (traitement parallèle, calcul intensif, etc.) qui n'ont pas été encore utilisées.

Une seconde question est de savoir comment régir les évolutions qui minimisent l'inertie. La théorie de la viabilité les procure toutes. Se pose alors le choix de certaines de ces évolutions.

Nous privilégierons ce que nous appelons les « évolutions persistantes », celles qui maximisent le temps de sortie de l'environnement, c'est-à-dire celles qui respecteront les contraintes le plus longtemps possible. Les évolutions viables sont les évolutions « persistantes » et pérennes, dont le temps de sortie est infini. L'idée sous-jacente aux évolutions ponctuées introduites par les paléontologistes est de poursuivre une évolution persistante et, lorsqu'elle quitte l'environnement, de la concaténer avec une autre évolution persistante, régie par un autre régulon constant, jusqu'à ce que, à son tour, elle quitte l'environnement, et ainsi de suite. La propriété caractéristique des évolutions ponctuées est de ne changer le niveau de l'activité industrielle que lorsque la viabilité est en jeu. Et, lorsqu'elle est en jeu, de la modifier en utilisant d'autres régulons.

Il est banal d'observer que tel est le cas aussi bien dans cet exemple spécifique que dans de nombreux systèmes du vivant. Il l'est moins de traduire ce problème mathématiquement et de le résoudre.

Les évolutions ponctuées impliquent des vitesses infinies (appelées « impulsions ») des régulons. Il est possible de poursuivre l'analyse en introduisant un seuil d'inertie donné. La question se pose de respecter non seulement les contraintes de viabilité, mais aussi des contraintes d'inertie imposant une borne à la fonction d'inertie. On cherche alors à déterminer en quels endroits et à quels moments il est nécessaire de « changer » le niveau de l'activité industrielle pour maintenir la viabilité du système à ce seuil d'inertie donné. La fonction d'inertie révèle ces moments et ces zones d'avertissement où l'inertie est atteinte. Ce sont des zones dangereuses, car on démontre l'existence d'une propriété de barrière semi-perméable impliquant qu'une fois atteint le seuil d'inertie, il est impossible de diminuer l'intensité de la vitesse de l'activité industrielle si l'on veut préserver la viabilité. Elle ne peut être qu'augmentée, ce qui accroît l'inertie, et donc le coût de la transition économique nécessaire au maintien de la concentration des gaz à effet de serre au-dessous du seuil fixé.

Ce concept peut être important pour affiner la formalisation du principe de précaution (Aubin, 1996b). Certes, les états du système doivent demeurer dans un environnement qui, lui, évolue, lentement, sous l'action d'activités exogènes (géologiques, climatiques, etc.) et, plus rapidement, sous l'action d'activités endogènes – et, en ce qui concerne le principe de précaution, d'activités anthropiques – qu'il s'agit de réguler. Il ne suffit pas de léguer à notre descendance un environnement viable, il faut aussi lui fournir les moyens de s'y adapter, et donc une vitesse raisonnable d'adaptation.

Approches directes et inverses

La question de l'adaptation au changement climatique et de l'impact des activités économiques sur le climat est généralement étudiée dans le cadre d'un système dynamique mathématique ou informatique précis en ce qui concerne les propriétés des évolutions qu'il régit, à l'aide de démonstrations mathématiques ou des techniques de simulation. Des analyses de sensibilité de telle ou telle propriété des solutions à tel ou tel paramètre impliqué dans le modèle sont très souvent conduites. Or, les systèmes du vivant, parmi lesquels les systèmes cognitifs, sociaux et économiques, (contrairement à ceux de la physique), sont mal connus et leurs propriétés de stabilité structurelle difficilement accessibles.

L'approche inverse consiste à :

– isoler telle ou telle propriété des évolutions jugée pertinente (par exemple, viabilité, capturabilité, optimalité, inertie, etc.) ;

– déterminer « tous les systèmes dynamiques » régissant des évolutions qui les satisfassent.

Si ces systèmes sont trop nombreux, il est loisible d'ajouter d'autres propriétés requises. Cette démarche n'est pas traditionnelle, et elle est la plupart du temps délicate à mettre en œuvre.

Le hasard et la nécessité

Le titre du livre de Jacques Monod (1970) résume les motivations qui ont débouché sur la théorie mathématique de la viabilité :

$$\begin{array}{ccc} \text{Le Hasard} & \text{et} & \text{La Nécessité} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x(\cdot) \in S(x) & \& & x(\cdot) \in K \end{array}$$

Le système

La notation $x(\cdot) \in S(x)$ désigne l'ensemble des évolutions (fonctions du temps) issues de l'état initial par ce qui est appelé un système évolutionnaire (Fig. 1, schéma du milieu). Il est déterministe si, à partir de chaque état, il existe une et une seule évolution. Parmi les systèmes évolutionnaires, figurent les systèmes régulés où l'évolution de l'état du système est régie par une équation différentielle paramétrée par l'évolution d'une variable. Selon le rôle qu'elle joue, cette variable a un nom spécifique :

- coefficient, si cette variable reste constante ;
- commande (ou, en franglais, contrôle), s'il existe un acteur identifié pilotant l'évolution de cette variable, comme en automatique, en robotique ou en finance de marchés ;
- régulon, lorsque l'on ignore quels sont les pilotes de l'évolution de cette variable ou que ceux-ci sont des abstractions (États, agents économiques, individus, métabolisme, « marché », etc.) ;
- *tychè*, signifiant chance en grec classique (puisque le terme d'aléa a été confisqué par les probabilistes), lorsque l'on ne possède aucune information sur celui ou ceux qui choisissent cette variable. Bien que cela sorte du cadre de cet exposé, je précise que leur usage offre une autre façon de traiter l'incertitude (dite tychastique), qui me semble mieux adaptée au cadre des systèmes du vivant que l'approche stochastique motivée par les marches aléatoires de particules à la surface d'un liquide.

Il existe beaucoup d'autres questions, donc de bien plus nombreux types de paramètres, mais, à ce jour, l'intervention des coefficients, des commandes, des régulons et des *tychè* dans la dynamique des systèmes, séparément ou ensemble, a déjà fait l'objet de nombreux travaux.

L'environnement et son noyau de viabilité

La nécessité traduit que, à chaque instant, l'évolution demeure dans un environnement K, représenté, sur la figure 2, par le dessin du schéma de gauche. Une telle évolution est dite viable dans l'environnement.

La première question qui se pose est de connaître l'ensemble des états initiaux à partir desquels il existe au

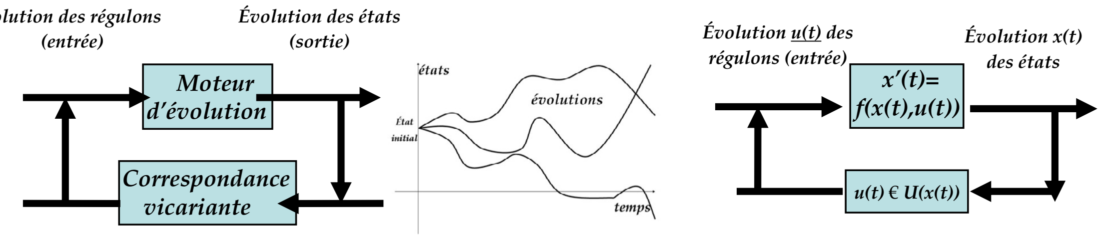

Fig. 1. Rétroactions. Le schéma de gauche symbolise un système entrée-sortie formé de deux « boîtes », la première prenant en entrée les régulons et fournissant en sortie des états, qui eux-mêmes rétroagissent sur les régulons, astreignant ceux-ci à obéir à des contraintes dépendant de l'état (via ce qu'on appelle une « correspondance vicariante ». Le schéma de droite indique la traduction mathématique de cet exemple de système évolutionnaire.

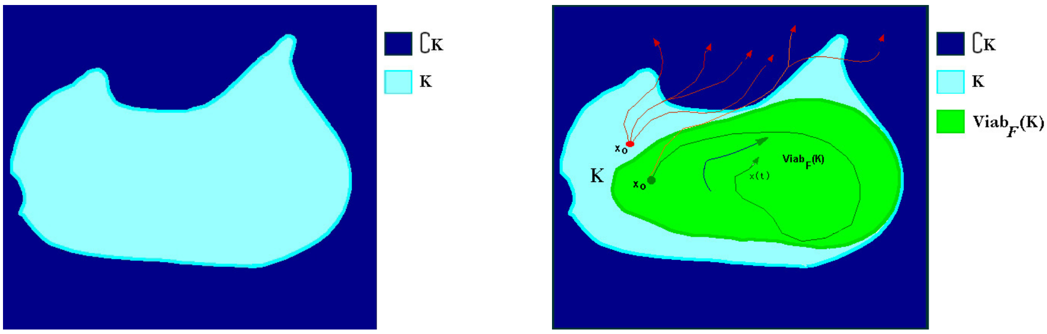

Fig. 2. Schéma d'un environnement et de son noyau de viabilité. Le schéma de gauche symbolise un environnement, sous-ensemble K quelconque, mais contentant sa frontière (sous-ensemble fermé) ; celui de droite, son noyau de viabilité. Partant du noyau de viabilité, une évolution au moins est viable dans l'ensemble, et, en fait, dans son noyau de viabilité. Partant du complémentaire du noyau de viabilité de l'environnement, toutes les évolutions quittent l'environnement en temps fini.

moins une évolution viable dans l'environnement. Cet ensemble, appelé « noyau de viabilité », est une sorte de « viabilomètre ». S'il est égal à l'environnement, ce dernier est alors qualifié de « viable ». À l'autre extrême, il peut être vide, triste situation où, de tout état initial, toutes les solutions quittent l'environnement en temps fini : l'environnement est alors qualifié de répulseur. La théorie de la viabilité est une collection de théorèmes mathématiques, de plus en plus nombreux, caractérisant ces noyaux de viabilité de diverses manières, techniquement plus maniables, explorant leurs propriétés et s'attachant à leurs applications dans divers domaines, dont certaines vont se nicher au sein même des mathématiques (solutions de systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre !). Les outils de l'analyse classique familière aux mathématiciens et aux utilisateurs des mathématiques ne sont pas adaptés à l'étude de tels problèmes, et il a donc fallu, et il faudra, forger des outils mathématiques pour les étudier : pour une présentation non mathématique, voir Aubin (2010) ; pour les traitements mathématiques, voir Aubin (1991), Aubin, Bayen et Saint-Pierre (à paraître). Les esprits ne sont pas préparés à l'utilisation de ces outils ; basés essentiellement sur la manipulation mathématique, algorithmique et logicielle des ensembles, ils relèvent de l'analyse multivoque (Aubin et Frankowska, 1990). C'est un frein considérable à leur utilisation, audelà de la pertinence des concepts, lesquels ne présentent que peu d'intérêt sans leurs propriétés. Grâce à Patrick Saint-Pierre (1994 et 1997), on sait programmer des algorithmes calculant ces noyaux de viabilité.

Rétroactions

Il ne suffit pas de connaître le noyau de viabilité, qui garantit l'existence d'évolutions viables ou « persistantes ». Encore faut-il piloter ces dernières. Comment ? Par le truchement d'une « rétroaction » (ou feedback), qui associe à chaque état le seul régulon qu'il faut utiliser pour maintenir l'évolution viable dans l'environnement (Fig. 3).

La construction de ces rétroactions est un sujet encore plus difficile sur le plan mathématique ; à ce stade, depuis la trentaine d'années qu'a été démontré le premier théorème de viabilité par Georges Haddad (1981) à la fin des années 1970, et malgré les progrès accomplis, notamment par Hélène Frankowska (2010), il reste de trop nombreux mystères et de multiples questions ouvertes.

La preuve en est que, dans la grande majorité des domaines, la règle de rétroaction est donnée a priori au lieu d'être calculée a posteriori en fonction de propriétés imposées au système : en automatique et robotique, les rétroactions sont des feedbacks linéaires dont on pense qu'ils sont encore valables dans le cas de systèmes non linéaires ; en économie, la rétroaction est la loi de l'offre et de la demande walrassienne déterminant l'évolution des prix (Aubin, 1997) ; en intelligence artificielle,

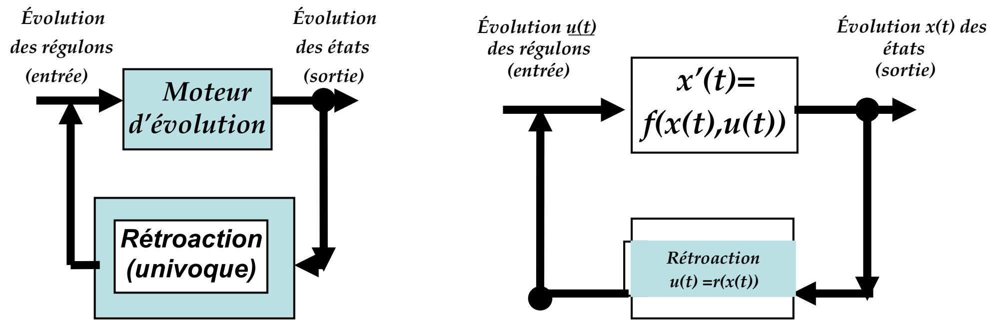

Fig. 3. Schéma d'une rétroaction viable. Le schéma de gauche symbolise le fait que qu'une rétroaction univoque, souvent appelée feedback, est une sélection de la correspondance spécifiant les contraintes sur les régulons dépendant de l'état (voir Fig. 1) ; la figure de droite la traduit en langage mathématique.

la règle de Hebb, imposant l'évolution des matrices synaptiques (Aubin, 1996a) ; en finance, la règle de gestion CPPI (*Constant Proportional Portfolio Insurance*) de Robert Merton et ses variantes. Elles ne rendent pas viables les environnements sur lesquels elles sont définies. De fait, tout système dynamique proposé comme « modèle » de tel ou tel problème relève de cette approche directe dans la mesure où des rétroactions sont implicitement choisies, ne serait-ce que par la détermination des paramètres constants du système. Les « problèmes inverses » posés dans tel ou tel domaine consistent d'ailleurs à déterminer ces coefficients en fonction de tel ou tel cahier des charges : ils cessent d'être constants pour devenir des contrôles ou des régulons.

Si la propriété étudiée est celle de la viabilité d'un environnement par rapport à un système régulé, sachant que le problème a une solution sur le noyau de viabilité, la question se pose de sculpter dans la correspondance vicariante la « correspondance de régulation » qui associe à chaque état appartenant à l'ensemble des régulons disponibles le sous-ensemble des régulons « pilotant » les évolutions viables. Elle est définie sur le noyau de viabilité au sens où la correspondance de régulation associe à chaque état du noyau de viabilité un ensemble de régulons (qualifiés de viables) qui est non vide, alors que, en dehors du noyau, cet ensemble est vide, puisqu'il n'existe pas de régulon viable associé à un tel état.

En quelque sorte, la correspondance de régulation est « la mère de toutes les rétroactions (univoques) viables », puisque, nécessairement, de telles rétroactions sont des sélections de la correspondance de régulation, choisissant un régulon parmi ceux qui sont viables.

Ceci conduit alors à l'immense chantier de la construction de rétroactions viables comme sélections de la correspondance de régulation fournie par les théorèmes de viabilité (le pluriel est justifié parce que la viabilité n'est que l'une des propriétés requises, à laquelle s'ajoutent celle de la capturabilité d'une cible et bien d'autres, impossibles à décrire en peu de mots).

Construction de rétroactions

La construction de sélections de la correspondance de régulation exige... des critères de sélection. On peut en rencontrer ou en imaginer de toutes sortes. J'indique deux classes de tels critères :

- critères de sélection temporels. Pour chaque état du noyau de viabilité, ils consistent à choisir directement, dans l'ensemble des régulons viables associés à cet état par la correspondance de régulation, un régulon viable qui optimise un critère d'optimisation, ou est un optimum de Pareto d'un problème multicritère, ou encore est un équilibre d'un mécanisme de théorie des jeux (statiques) sur les régulons, ou est lui-même un équilibre décrivant l'évolution des régulons, etc. ;
- critères de sélection intertemporels, tels que la minimisation du temps de capture d'une cible, ou de sa capture asymptotique, ou la minimisation de la longueur de la trajectoire des évolutions viables, ou tout autre critère de minimisation intertemporel étudié dans le cadre de la théorie du contrôle optimal (qui, dans la majorité des cas, ignore les contraintes de viabilité ou, dans le vocabulaire de cette théorie, les contraintes sur l'état). En ajoutant au système initial autant de variables réelles que de critères intertemporels, il est possible d'utiliser les techniques de viabilité qui conduisent à sculpter dans la correspondance de régulation des rétroactions viables compatibles avec ces problèmes. Ce sont de tels mécanismes qui ont été étudiés par H. Frankowska à l'aide des théorèmes de viabilité. Les nombreux « indicateurs » proposés par la théorie de la viabilité entrent dans ce cadre : la fonction de temps de sortie ; la fonction de crise, introduite par Doyen et Saint-Pierre (1997) ; la fonction de résilience, par Sophie Martin (2004 et 2005) ; ou encore, les indicateurs de développement durable, par Durand et Martin (2008), parmi bien d'autres. Certains de ces indicateurs mesurent la « non viabilité », et sont ainsi autant de mesures non probabilistes de risque qui s'ajoutent aux mesures classiques (Godard *et al.*, 2002).

Rétablir la viabilité

Il n'y a aucune raison pour qu'un environnement soit viable par rapport à un système évolutionnaire. La notion de noyau de viabilité peut être considérée comme un moyen de rétablir la viabilité en gardant le même système évolutionnaire et en remplaçant l'environnement par son noyau. Il est possible de la rétablir par d'autres mécanismes, dont trois ont été étudiés mathématiquement.

Multiplicateurs de viabilité

Il ne s'agit plus de changer l'environnement, mais de corriger le système évolutionnaire. Cela a conduit à la théorie des « multiplicateurs de viabilité », qui sont de nouveaux régulons que la théorie intègre au système initial, de sorte que l'environnement soit viable par rapport à ce nouveau système régulé par ces multiplicateurs de viabilité. Un cas particulier très important est celui où les multiplicateurs de viabilité sont des « matrices connexionnistes » régulant des évolutions dans des réseaux ou réseaux de réseaux, et leurs liens avec les concepts de complexité des systèmes (Aubin, 1998 et 2003).

Systèmes impulsionnels

Par définition, les vitesses avec lesquelles évoluent les états sont finies. Une impulsion est une « vitesse infinie » qui rend donc discontinues les impulsions. Lorsque l'environnement n'est pas viable par rapport à un système évolutionnaire, on introduit un moteur impulsionnel gérant les impulsions lorsque l'état du système atteint un sous-ensemble de l'espace des états/temps, que l'on pourrait qualifier de trappe. Il est alors possible d'étudier les questions de viabilité lorsque l'évolution (discontinue) est gérée conjointement par un système évolutionnaire et un moteur impulsionnel.

Systèmes mutationnels

Que se passe-t-il lorsque l'environnement évolue ? Et surtout, comment cet environnement évolue-t-il ? Répondre à cette question revient à inventer des sortes d'équations différentielles régissant l'évolution des ensembles, appelées équations mutationnelles, à la manière des équations différentielles régissant l'évolution des vecteurs. Il a fallu attendre les années 1990 pour pouvoir définir ce qu'est la vitesse d'une évolution d'ensemble de façon à obtenir une théorie qui donne des résultats analogues à ceux des équations différentielles, et qui les redonne lorsque les ensembles sont réduits à un élément (Aubin, 2000).

Systèmes historiques

De fait, dans la mesure où le temps initial n'existe pas (sauf, peut-être, celui du big-bang), il est nécessaire de considérer des systèmes historiques où l'évolution ne dépend pas de l'état du système à l'instant initial, mais de son histoire (et non pas de sa trajectoire ou de son « path », comme ces systèmes historiques qui les gouvernent sont souvent et improprement qualifiés). Le premier théorème de viabilité de Georges Haddad (1981) a d'ailleurs été démontré pour les systèmes historiques. Mais les difficultés techniques sont telles que la théorie s'est développée dans le cadre mathématique plus simple des systèmes « à temps initial fixé », sans passé.

Persistance

Évolutions « persistantes »

Que se passe-t-il en dehors du noyau de viabilité ? De chaque état initial, toutes les évolutions quittent l'environnement en temps fini. On appelle évolution « persistante » l'évolution qui demeure viable le plus longtemps possible dans l'environnement. Pour obtenir des évolutions persistantes, il faut définir en amont la notion de « temps de sortie » d'une évolution (le moment où l'évolution quitte l'environnement) et la « fonction de sortie » qui associe à chaque état le plus grand temps de sortie des évolutions qui en partent. Les évolutions persistantes sont donc celles qui maximisent le temps de sortie. Naturellement, le temps de sortie d'un état appartenant au noyau de viabilité est infini.

La zone de sortie d'un environnement est l'ensemble des états dont la fonction de sortie est nulle : toutes les évolutions qui en sont issues quittent immédiatement l'environnement. On démontre qu'un ensemble est viable si et seulement si sa zone de sortie est vide (cette assertion est intuitive, mais elle n'est pourtant pas vraie sans hypothèses et sans démonstration).

Le principe d'inertie

Dans le cas où le paramètre est un régulon, « piloté » par un acteur myope, conservateur et paresseux, le mode de régulation privilégié est celui où le régulon demeure constant, mais où l'état, lui, continue à évoluer (l'état est un « équilibre » si lui-même n'évolue pas, une situation par trop statique dans un monde en évolution). Si le noyau de viabilité du système à régulon constant n'est pas vide, il est appelé « niche de viabilité du régulon », puisque de tout point de la niche part une évolution viable régulée par ce seul régulon. Toute évolution du système initial atteignant en temps fini la niche de viabilité d'un régulon peut y demeurer à jamais, ce qui décrit la

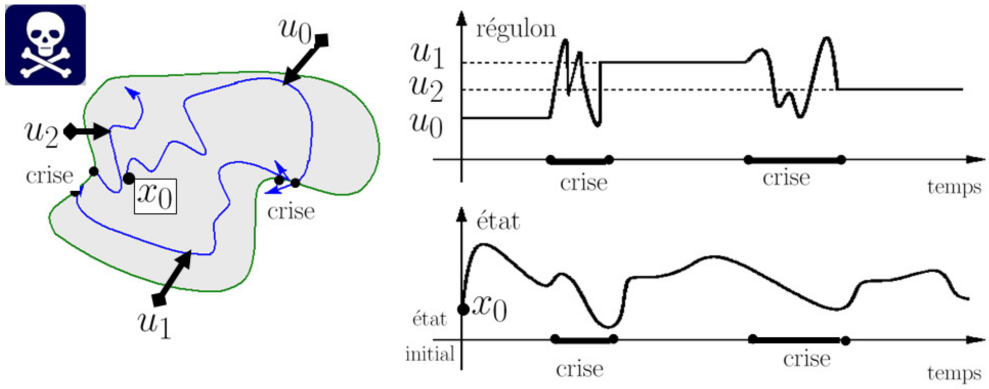

Fig. 4. Crises de viabilité : schéma d'évolutions ponctuées et de leurs régulons. À gauche, le sous-ensemble représente l'environnement en dehors duquel les états ne sont pas viables. La courbe représente la trajectoire de l'évolution partant de l'état initial x_0. La figure de droite, en haut, décrit le décours temporel du régulon, qui est constant aussi longtemps que possible, prenant ici les valeurs u_0, u_1 et u_2 pendant trois périodes successives durant lesquelles l'évolution « à régulon constant » est viable, comme indiqué dans la figure de gauche. Lorsqu'elle cesse d'être viable, le régulon doit évoluer pendant une « crise de viabilité » jusqu'au prochain instant où le régulon peut demeurer de nouveau constant en pilotant une évolution viable, et ainsi de suite. L'état, lui, évolue pendant ce temps, comme l'illustre la figure de droite, en bas.

propriété de *locking-in* des niches de viabilité. En dehors d'une niche de viabilité d'un régulon, l'évolution persistante à régulon constant quitte l'environnement par la zone de sortie de ce régulon.

La version « forte » (ou dure) du principe d'inertie édicte que l'on ne peut changer de régulon que lorsque la viabilité est en jeu (Aubin et Saint-Pierre, 2005a). C'est, selon Chen Luxi (communication personnelle), une traduction mathématique de la paradoxale maxime taoïste : *Wu(2) wei(2) er(2) wu(2) bu(4) wei(2)*, signifiant « ne rien faire, tant qu'on peut ne rien faire ».

Que faire dans ce cas ? Si la zone de sortie du régulon coïncide avec la zone de sortie du système régulé, il n'y a plus aucun espoir. Sinon, il existe un second régulon qui n'appartient pas à la zone de sortie du premier, de sorte que, en le choisissant, l'évolution se poursuit à régulon constant, tant qu'elle reste viable. Si elle quitte l'environnement en temps fini, et s'il existe un troisième régulon qui n'appartient pas à la zone de sortie du second, il sera de nouveau possible de poursuivre l'évolution en utilisant ce troisième régulon, et ainsi de suite.

La notion d'évolution persistante et le principe d'inertie permettent donc d'offrir une formalisation mathématique de la notion d'« évolution ponctuée », introduite à la fin des années 1960 par Nils Eldredge et Stephen Gould en paléontologie pour décrire des discontinuités des témoignages de l'évolution des espèces biologiques, reprenant une proposition de Darwin (1859) : « Les périodes durant lesquelles les espèces ont subi des modifications, bien que fort longues mesurées en années, ont probablement été courtes en comparaison des périodes durant lesquelles ces mêmes espèces sont restées sans aucun changement. »

Mathématiquement, une évolution « ponctuée » est formée d'une concaténation (enchaînement) d'évolutions à régulons constants, modifiés à leurs zones de sortie à des *kairos* (du grec « moment propice ») déterminés par les fonctions de temps de sortie (Fig. 4).

Ces concepts une fois introduits, reste à démontrer l'existence d'évolutions ponctuées régulées par un ensemble fini de régulons : elle est assurée, sous des hypothèses convenables, lorsque les zones de sortie de ces régulons sont disjointes deux à deux. De surcroît, une évolution ponctuée passe de chaque zone de sortie à une autre. Par exemple, s'il n'existe que deux régulons dont les zones de sortie sont disjointes, une évolution ponctuée oscille entre les deux zones de sortie, régulée par un de ces deux régulons pour passer de l'un de ces ensembles à l'autre, et par l'autre pour assurer le retour. Ces évolutions jouissent de la propriété d'« hystérésis » (Aubin, 2008). Les évolutions ponctuées utilisant n régulons jouissent d'une propriété d'hystérésis d'ordre n, alternant l'utilisation des n régulons, dans un ordre dicté par leurs zones de sortie et leurs fonctions de sortie. Elles forment un enchevêtrement d'évolutions cycliques à partir du seul principe de viabilité, sans faire appel aux systèmes d'équations périodiques (difficiles, voire, impossibles à modéliser), conformes au précepte de parcimonie du rasoir d'Ockham.

Endogénéisation des régulons

Métasystèmes

Pour reprendre le langage des économistes, la question est de changer le statut du régulon, de le faire passer de paramètre de régulation au statut de variable d'état et de prendre pour nouveau régulon, dès lors qualifié de métarégulon, la vitesse du régulon.

Le principe d'inertie, dans sa version dure, exige que cette vitesse soit ou bien nulle ou bien infinie. Introduire une vitesse du régulon permet d'adoucir cette version, en minimisant la vitesse des régulons viables, régissant ainsi des évolutions qualifiées de « lourdes » (au sens des tendances lourdes) [Aubin et Frankowska, 1985].

L'outil conceptuel majeur qui émerge dans ce cas est celui de « fonction d'inertie » : elle associe à chaque état initial et à chaque régulon initial la meilleure de la pire des variations de la vitesse du régulon au cours du temps. Cette fonction peut prendre des valeurs infinies, indiquant que cette question n'a pas de solution. C'est une solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire de Hamilton-Jacobi-Bellman. Elle peut être calculée à l'aide de l'algorithme de viabilité, puisqu'on démontre que les graphes de ces solutions sont eux-mêmes construits à partir de noyaux de viabilité (ce sont des théorèmes difficiles).

Un seuil d'inertie étant fixé, sa « zone critique » est la courbe de niveau de la fonction d'inertie, c'est-à-dire l'ensemble des couples état/régulons dont l'inertie est exactement égale au seuil imposé.

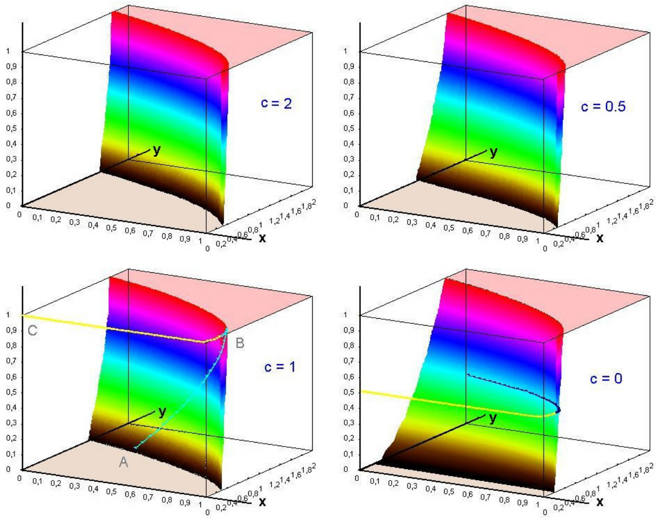

Fig. 5. Simulation du noyau de viabilité du « modèle » le plus simple de pollution. Cet exemple visualise la fonction d'inertie en fonction de la concentration, du niveau de pollution et de l'activité économique. L'axe des x est celui de la concentration, l'axe des y celui des taux de pollution et l'axe des z celui du niveau de l'activité industrielle. Chacune des nappes représente la zone d'avertissement dans laquelle l'intensité de l'activité économique doit être égale au coût de transition c imposé. Ces évolutions sont viables, naturellement, puisque cette propriété était requise, mais viables également dans la zone d'avertissement.

Exemple : couplage des systèmes climatique et économique

Je propose d'illustrer mon propos par un exemple le plus simple possible de problème de couplage des systèmes climatique et économique : parmi les nombreuses références, voir Aubin *et al.* (2004), Domenech *et al.* (à paraître), Doyen *et al.* (2008), Doyen et Gabay (1999), Doyen *et al.* (1996), Haurie et Viguier (2005), Loulou *et al.* (2005), Petschel-Held *et al.* (1999), etc. Considérons les trois variables suivantes :

- la concentration $x(t)$ du gaz à effet de serre, dont le seuil est fixé à b unités ;
- le taux de pollution à court terme généré par un niveau de production $y(t)$;
- le niveau de l'activité industrielle $z(t)$.

Le couplage avec le système économique intervient en remarquant que les variations $y'(t)$ du taux de pollution dépendent du niveau $z(t)$ d'activité industrielle. Aucun des modèles macroéconomiques emportant mon adhésion, je traduis l'ignorance où nous sommes de la nature de cette dépendance en considérant simplement un indicateur de l'activité économique comme un régulon et en supposant que l'accroissement du taux de pollution est inférieur à cet indicateur.

On considère l'ensemble des évolutions régies par le système d'inclusions différentielles

$$\begin{cases} (i) & x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ (ii) & |y'(t)| \le z(t) \end{cases}$$

partant d'une concentration initiale x de gaz, d'un seuil de pollution y et d'un niveau industriel z, désigné par

$$\mathcal{P}(x, y, z)$$

La fonction d'inertie est définie par

$$\beta(x, y, z) := \inf_{(x(.),y(.),z(.))\in\mathcal{P}(x,y,z)} \sup_{t\ge 0} |z'(t)|$$

Elle mesure le coût de transition de l'activité industrielle pour maintenir la concentration de gaz au-dessous du seuil imposé. Cette fonction d'inertie peut être calculée à l'aide de l'algorithme de viabilité. Comme c'est une fonction de 4 variables, on ne peut la décrire que par ses surfaces de niveau (jouant le rôle des lignes de niveau en dimension 2) pour différentes valeurs du coût de transition économique c (Fig. 5).

Les travaux récents et en préparation de Telma Bernardo (Saint-Pierre et Bernado, à paraître), Pablo Domenech, Marie-Hélène Durand, Sophie Martin, Patrick Saint-Pierre et Georges Zaccour concernent le calcul de noyaux de viabilité et de fonctions de résilience de modèles proposés dans la littérature.

Commentaires pour conclure

Il ne suffit pas de faire la liste des problèmes que j'ai évoqués, parmi bien d'autres, mais de démontrer à

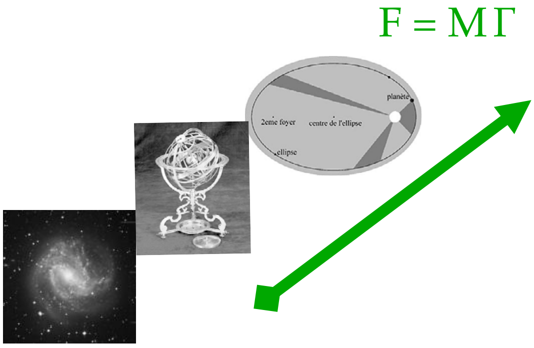

Fig. 6. Illustration symbolique de la longue marche vers l'abstraction. Nos ancêtres ont contemplé depuis des temps immémoriaux la voûte céleste et n'on cessé de chercher à percer le mystère des astres, entreprenant une longue marche vers l'abstraction, passant par les sphères de Ptolémée, les ellipses de Kepler, la loi « révolutionnaire » de Newton, devenue depuis lors la « mère de tous les systèmes évolutionnaires », et cette quête se poursuit avec la conquête spatiale.

chaque fois que ces mécanismes sont compatibles avec les hypothèses que doit satisfaire la correspondance de régulation, ce qui est un travail de mathématicien que les lecteurs de cette revue sont trop heureux d'ignorer ! Les algorithmes de viabilité de Patrick Saint-Pierre et Anya Désilles permettent de calculer non seulement les noyaux de viabilité, mais les correspondances de régulation et les rétroactions viables. Pour pallier la gourmandise en mémoire requise par l'utilisation de ces algorithmes, il faut que soient entreprises des recherches informatiques par des spécialistes de génie logiciel et de calcul intensif qui s'intéresseraient de plus aux problèmes de manipulation informatique d'ensembles. La difficulté actuelle est donc de les inciter à s'occuper de ces questions et d'obtenir les financements conséquents qui ne sont généralement pas attribués aux mathématiciens.

Nous continuons chaque jour à commenter le temps qu'il fait et à offrir aux météorologues et climatologues les plus puissants des moyens de calcul disponibles. Si la marche vers l'abstraction (Fig. 6) a déjà avancé dans ces domaines, nous en sommes encore à contempler le genre humain et à entreprendre cette marche. Les systèmes du vivant (parmi lesquels le système économique) sont bien plus compliqués que les systèmes physiques, qui ont presque exclusivement motivé des développements mathématiques de plus en plus sophistiqués. Ils sont trop complexes pour fournir des « chiffres » ; mais il ne faut pas oublier que, très modestement, les mathématiciens peuvent offrir des « lettres », des résultats qualitatifs, de nouveaux concepts pour analyser ces systèmes, de nouvelles lunettes pour regarder et interpréter ce que nous faisons collectivement. Il faut se souvenir que les sociétés humaines ne se dirigent pas, mais évoluent à l'aune des évolutions de leurs membres, des plus modestes aux plus puissants.

Sauter les étapes mathématiques dans la marche vers l'abstraction peut conduire à de dangereux contresens. Rien ne pourra être fait sans une formation mathématique approfondie des jeunes chercheurs de ces domaines, non pas pour résoudre mathématiquement les problèmes, mais pour les poser, pour suggérer la création d'outils mathématiques pertinents et pour valider les résultats mathématiques.

Je suis navré que le court-termisme que favorisent les systèmes insensés d'évaluation quantitative des travaux de recherche et l'organisation actuelle de la science ne privilégie pas ce vœu, d'un autre temps, sans doute, où l'on donnait du temps au temps, du temps à la contemplation, du temps à la réflexion.

Références

Aubin, J.-P., 1991. *Viability Theory*, Boston, Birkhäuser.

Aubin, J.-P., 1996a, *Neural Networks and Qualitative Physics: A Viability Approach*, Cambridge (UK), Cambridge University Press.

Aubin, J.-P., 1996b. Une métaphore mathématique du principe de précaution, *Natures Sciences, Sociétés*, 4, 2, 146-154.

Aubin, J.-P., 1997. *Dynamic Economic Theory: A Viability Approach*, Berlin, New York, Springer-Verlag.

Aubin, J.-P., 1998. Connectionist complexity and its evolution, in *Équations aux dérivées partielles et applications : articles dédiés à J.-L. Lions*, Paris, Gauthier-Villars / Elsevier, 50-79.

Aubin, J.-P., 2000. *Mutational and Morphological Analysis: Tools for Shape Regulation and Morphogenesis*, Boston, Birkhäuser.

Aubin, J.-P., 2003. Regulation of the evolution of the architecture of a network by Connectionist tensors operating on coalitions of actors, *Journal of Evolutionary Economics*, 13, 2, 95-124.

Aubin, J.-P., 2008. Ockham's razor: Deriving cyclic evolutions from viability and inertia constraints, *ARIMA*, 9, 17-31.

Aubin, J.-P., 2010. *La Mort du devin, l'émergence du démiurge : essai sur la contingence, la viabilité et l'inertie des systèmes*, Paris, Beauchesne.

Aubin, J.-P., Frankowska, H., 1985. Heavy viable trajectories of controlled systems, *Annales de l'institut Henri-Poincaré (C) Analyse non linéaire*, 2, 371-395.

Aubin, J.-P., Frankowska, H., 1990. *Set-Valued Analysis*, Boston, Birkhäuser.

Aubin, J.-P., Bernardo, T., Saint-Pierre, P., 2004. A viability approach to global climate change issues, in Haurie, A Viguier, L. (Eds), *Coupling Climate and Economic Dynamics: Advances in Global Change Research*, Heidelberg, Springer.

Aubin, J.-P., Saint-Pierre, P. 2005a. Guaranteed Inertia Functions, in Haurie, A., Zaccour, G. (Eds), *Dynamic Games: Theory and Applications*, New York, Springer Science / Business Media.

Aubin, J.-P., Saint-Pierre, P., 2005b. Des « noyaux » dans les quotas de pêche, *La Recherche*, 385, 80-81.

Aubin, J.-P., Saint-Pierre, P., 2007. An introduction to Viability Theory and management of renewable resources, in Kropp, J., Scheran, J. (Eds), *Advanced Methods for Decision Making* *and Risk Management in Sustainability Science*, New York, Nova Science Publishers., 43-80.

Aubin, J.-P., Chen, L., Durand, M.-H., à paraître. Dynamical allocation method of emission rights of pollutants by viability constraints under tychastic uncertainty, *Environmental Modelling and Assessment*.

Aubin, J.-P., Bayen, A., Saint-Pierre, P., à paraître. *Viability Theory: Regulation of Uncertain Systems*, Heidelberg, Springer-Verlag.

Barbault, R., Weber, J., 2010. *La Vie, quelle entreprise ! Pour une révolution écologique de l'économie*, Paris, Le Seuil.

Cury, P., Mullon, C., Garcia, S.M., Shannond, L.J., 2005. Viability theory for an ecosystem approach to fisheries, *ICES Journal of Marine Science*.

Darwnin, C., 1859. *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*, London, John Murray

Domenech, P.A., Saint-Pierre, P., Zaccour, G., à paraître. Forest conservation and CO_2 emissions: A viability approach, *Environmental Modelling and Assessment*.

Doyen, L., Gabay, D., Hourcade, J.-C., 1996. Risque climatique, technologie et viabilité, in *Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement : Journées du PIREVS. Communications orales, session B, Modélisation des systèmes complexes, nouveaux modèles, validation de modèles*, *[Cité des sciences et de l'industrie, Paris, 15-17 janvier]*, Paris, CNRS, 129-134.

Doyen, L., Saint-Pierre, P., 1997. Scale of viability and minimal time of crisis, *Set-Valued Analysis*, 5, 227-246.

Doyen, L., Gabay, D., 1999. Viable regulation of a dynamic climate-economic model, *Proceedings of the symposium Planetary Garden in Chambery, Session B9*, Chambéry, 386.

Doyen, L., Dumas, P., Ambrosi, P., 2008. Optimal timing of CO_2 mitigation policies for a cost-effectiveness model, *Journal of Mathematics and Computer Modeling*, 48, 882-897 (http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2007.11.010).

Durand, M.-H., Martin, S., 2008. Développement durable et développement viable. Communication au colloque *La Problématique du développement durable vingt ans après : nouvelles lectures théoriques, innovations méthodologiques, et domaines d'extension*, Villeneuve d'Ascq.

Frankowska, H., 2010, Control under state constraints, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (ICM 2010), Hyderabad, India.

Godard, O., Henry, C., Lagadec, P., Michel-Kerjan, E., 2002. *Traité des nouveaux risques : précaution, crise, assurance*, Paris, Gallimard.

Griffon, M., (Ed.), 1996. *Vers une révolution doublement verte : actes du séminaire des 8 et 9 novembre 1995, Futuroscope, Poitiers*, Montpellier, Cirad.

Griffon, M., 2003. *Le Développement durable : ensemble*, Paris, Platypus Press / Cirad.

Griffon, M., Griffon L., 2010. *L'Homme viable : du développement au développement durable,* Paris, Odile Jacob.

Guesnerie, R., Tulkens, H. (Eds), 2008. *The Design of Climate Policy*, Cambridge (MA), The MIT Press.

Haddad, G., 1981. Monotone viable trajectories for functional differential inclusions, *Journal of Differential Equations*, 42, 1-24.

Haurie, A., Viguier, L. (Eds), 2005. *The Coupling of Climate and Economic Dynamics: Essays on Integrated Assessment*, Boston, Dordrecht, London, Kluwer Academic Publishers.

Jancovici, J.-M., 2002. *L'Avenir climatique*, Paris, Le Seuil.

Le Fur, J., Cury, P., Laloë, F., Durand, M.-H., Chaboud, C., 1999. Co-viabilité des systèmes halieutiques, *Nature Sciences Sociétés*, 7, 2, 19-32.

Le Treut, H., Jancovici, J.-M., 2001. *L'Effet de serre*, Paris, Flammarion.

Loulou, R., Waaub, J.-P., Zaccour, G. (Eds), 2005. *Energy and Environment*, New York, Springer-Verlag.

Martin, S., 2004. The cost of restoration as a way of defining resilience : A viability approach applied to a model of lake eutrophication, *Ecology and Society*, 9, 2, 8.

Martin, S., 2005. *La Résilience dans les modèles de systèmes écologiques et sociaux*. Thèse de doctorat en mathématiques appliquées, ENS Cachan.

Monod, J., 1970. *Le Hasard et la nécessité : essai sur la philosophie naturelle de la biologie moderne*, Paris, Le Seuil.

Petschel-Held, G., Schellnhuber, H.-J., Bruckner, T., Toth, F., Hasselmann, K., 1999. The tolerable windows approach: Theoretical and methodological foundations, *Climatic Change*, 41, 3-4, 303-331.

Saint-Pierre, P., 1994. Approximation of the viability kernel, *Applied Mathematics and Optimization*, 29, 187-209.

Saint-Pierre, P., 1997. Le calcul du noyau de viabilité, outil d'analyse des modèles dynamiques de systèmes contraints, in Blasco, F. (Ed.), Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement : Journées du Programme Environnement, vie et sociétés du CNRS [Paris, 1996], Paris, Amsterdam, Oxford, Elsevier.

Saint-Pierre, P., Bernardo, T., à paraître. Evaluating climate change impact and efficient threshold guardrails using adapted viability tools.

Reçu le 24 juin 2009. Accepté le 1er juillet 2010.